Formation de Motifs Géométriques Arbitraires par des Robots Désorientés

Quentin Bramas, Sébastien Tixeuil

Formation de Motifs Géométriques Arbitraires par des Robots Désorientés †

Quentin Bramas[1] et Sébastien Tixeuil[1]

[1] *Sorbonne Universités, UPMC Univ Paris 06, CNRS, LIP6 UMR 7606, 4 place Jussieu 75005 Paris.*

Nous considérons un ensemble de robots anonymes et autonomes qui se déplacent dans le plan afin de former un motif géométrique donné. En l'absence de condition sur le motif à former, un algorithme qui résout ce problème est nécessairement probabiliste. Dans ce papier nous montrons que toutes les hypothèses supplémentaires concernant les robots formulées jusqu'à présent ne sont pas nécessaires. Pour cela, nous présentons le premier algorithme probabiliste fonctionnant avec des robots totalement asynchrones et désorientés.

Mots-clefs : Réseau de Robots, Algorithme Probabiliste, Algorithme Distribué

1 Introduction et Modèle

Nous considérons un système distribué constitué de robots autonomes qui peuvent observer leurs positions respectives, effectuer des calculs, et se déplacer dans un plan Euclidien. Les robots ne communiquent pas explicitement entre eux (mais peuvent effectuer des déductions à partir des positions observées). Ils sont anonymes, autonomes, et exécutent le même algorithme de manière asynchrone. Les travaux dans le domaine des réseaux de robots se concentrent sur l'étude des tâches qu'il est possible de réaliser avec ces robots très simples, parfois en ajoutant certaines hypothèses supplémentaires, qui peuvent concerner les robots eux-mêmes, leurs positions initiales, ou l'ordonnancement des exécutions.

Un des problèmes fondamentaux consiste à déplacer les robots jusqu'à former un motif géométrique donné. Lorsque les robots partagent une même chiralité (c'est à dire qu'ils ont la même notion de droite et de gauche), on sait qu'il est nécessaire et suffisant que la *symétricité* de la configuration de départ (c'est à dire le plus grand ρ tel que la rotation par $2\pi/\rho$ de la configuration est invariante) divise celle du motif à former pour qu'il existe un algorithme déterministe qui forme ce motif. Dès lors, l'ensemble des hypothèses supplémentaires est minimal. Récemment, Yamauchi et Yamashita [YY14] ont proposé un algorithme probabiliste permettant de supprimer l'hypothèse faite sur la configuration initiale (leur solution fonctionne pour toute configuration initiale). Cependant, leur algorithme conserve l'hypothèse de la chiralité commune, qui n'a pas été montré nécessaire dans le cas d'un algorithme probabiliste. De plus, ils introduisent deux nouvelles hypothèses très fortes : *(i)* un robot ne peux pas faire de pause lors de son mouvement, et *(ii)* un robot a la possibilité de choisir un élément aléatoire uniformément dans un ensemble infini (c'est-à-dire qu'il peut utiliser un nombre infini de bits aléatoires).

Dans ce papier nous cherchons à réduire l'ensemble des hypothèses suffisantes pour former des motifs géométriques avec un algorithme asynchrone probabiliste. Pour cela nous construisons un algorithme qui ne fait aucune hypothèse sur le mouvement des robots, ni sur une quelconque connaissance commune (et notamment la chiralité), et n'autorise qu'un seul bit aléatoire par activation par robot. De plus, notre algorithme peut s'étendre aux cas où le motif géométrique à former contient des points de multiplicité. Les détails de notre algorithme sont disponible dans le rapport technique associé [BT15].

Modèle. Un réseau de n robots est modélisé par l'ensemble $P = \{r_1, \dots, r_n\}$, appelé *configuration*, de leurs positions dans le plan Euclidien. Les positions ne sont pas définies dans un système de coordonnées particulier et deux configurations sont équivalentes si l'une peut être obtenue de l'autre par translation,

† Ce travail a été effectué dans le cadre du Labex SMART soutenu par les financements de l'état Français gérés par l'ANR sous le programme Investissements d'Avenir sous la référence ANR-11-IDEX-0004-02. Aussi, il est soutenu en partie par le LINCS.

rotation ou symétrie. Pour notre analyse nous supposons que les positions sont définies dans un système de coordonnées global, inconnu des robots.

Les robots s'activent de manière asynchrone et effectuent des cycles *Regarde-Calcule-Se Déplace*. A chaque activation, un robot *Regarde* autour de lui et obtient un *instantané* des positions des autres robots. Basé uniquement sur cette information visuelle, le robot *Calcule* une destination, et *se Déplace* vers cette destination (sans être assuré de l'atteindre). La durée de chaque phase du cycle, ainsi que la durée entre deux activations, est arbitraire. Lorsqu'un robot regarde son environnement, il obtient l'ensemble des positions occupées par les autres robots dans un système de coordonnées egocentré dont l'orientation et la mesure unitaire sont arbitraires. En particulier, il ne sait pas combien de robots se situent à une position donnée. De plus, un robot peut observer son environnement lorsque d'autres robots sont en mouvement, ils lui apparaissent alors comme s'ils étaient immobiles. Enfin, les robots ne disposent pas de mémoire persistante : à chaque début de cycle, leur mémoire est réinitialisée.

Le problème de la formation de motif, consiste à atteindre, en un nombre fini d'activations et avec probabilité 1, une configuration équivalente à un ensemble de points F donné. Le motif géométrique F à former est donné aux robots dans un système de coordonnée arbitraire.

Notations. On note $SEC(P)$, le plus petit cercle qui contient les points de P (il ne dépend pas du système de coordonnées utilisé). La suite des angles formés par un ensemble de robots autour d'un point donné est appelée la *suite des angles*. Un ensemble A de robots est dit equiangulaire (resp., biangulaire), s'il existe un point c tel que la suite des angles de A autour de c soit constante (resp., périodique de période 2). Si une configuration P est equiangulaire ou biangulaire, le point c est appelé *le centre de la configuration*. Sinon *le centre de la configuration* est le centre de $SEC(P)$. Dans tous les cas, il est noté $c(P)$. Le sous-ensemble equiangulaire ou biangulaire le plus proche du centre (noté EBPC) d'une configuration P est défini comme le plus grand sous-ensemble de robots, les plus proches du centre, formant un ensemble equiangulaire ou biangulaire de centre $c(P)$. Ce sous-ensemble, s'il existe, est unique. Remarquons que si une configuration possède un sous-ensemble EBPC Q, alors Q est invariant par mouvement des robots de Q dans la direction (possiblement opposée) du centre, tant qu'ils restent parmi les robots les plus proches du centre.

Configurations Ordonnées et Guidées. Une configuration est *ordonnée* si elle permet d'en déduire un ordre total sur les robots. Ainsi chaque robot qui observe cette configuration est capable de déterminer son rang. Notre algorithme utilise un sous-ensemble des configurations ordonnées, appelées configurations *guidées*, qui sont obtenues lorsque les deux robots les plus proches du centre suffisent à l'ordonner. C'est-à-dire que la configuration reste ordonnée, même après que les autres robots se déplacent. Cette propriété est utilisée par notre algorithme pour déplacer certains des robots vers leur destination du motif à former. L'invariance de l'ordre permet d'assurer que les destinations restent les mêmes après le mouvement, et sont donc atteintes en un nombre fini d'activations.

2 Aperçu de l'Algorithme

Notre algorithme se décompose en plusieurs phases. Comme les robots n'ont pas de mémoire persistante, ils doivent reconnaitre la phase à exécuter uniquement en observant la configuration courante. On associe donc à chaque phase un ensemble de configurations pour lesquelles elle s'exécute. Les ensembles associés à chaque phase doivent être disjoints pour que l'algorithme soit correctement défini. De plus, afin d'assurer le bon déroulement des opérations quand les robots ont des vitesses d'exécution différentes, les phases doivent vérifier la propriété suivante : lorsqu'un ou plusieurs robots exécutent une phase, pendant toute la durée du mouvement, la configuration instantanée doit appartenir à l'ensemble des configurations associées à cette phase. Autrement dit, un changement de phase ne peut s'effectuer que lorsque tous les robots sont immobiles. Ainsi, a chaque instant, il n'est pas possible que deux robots exécutent des phases différentes de l'algorithme, ce qui permet aux robots d'anticiper plus facilement le mouvement des autres. Nous présentons maintenant un aperçu des phases et de leur ensemble de configurations associées, en commençant par les plus précises (intuitivement, celles qui sont exécutées “à la fin”, même si en réalité la configuration initiale est quelconque). Dans la suite, même si ce n'est pas précisé, l'ensemble des configurations associées à une phase ne contient pas de configurations associées à une phase définie précédemment.

Terminaison. L'ensemble des configurations associées à cette phase contient celles qui sont ordonnées, et dont tous les robots, sauf le plus petit (selon son rang), forment le motif géométrique dont on à enlevé un des plus petit points. Cette phase consiste à déplacer le plus petit robot jusqu'au point du motif non occupé par un robot. Ce mouvement peut s'effectuer de telle sorte que ce robot reste le plus petit, ce qui permet aux configurations suivantes d'être associées à cette même phase. Une fois la destination du robot atteinte, le motif est entièrement formé et l'algorithme s'arrête.

Quasi Formation du Motif. L'ensemble des configurations associées à cette phase contient celles qui sont guidées. L'ordre des robots permet de connaître exactement leur destination finale (le motif est orienté de telle sorte que le deuxième robot guidant la configuration est placé sur un point du motif). La phase consiste tout d'abord à déplacer chaque robot, l'un après l'autre, afin qu'il soit à la même distance du centre que sa destination (voir Figure2). Ensuite, chaque robot se déplace (en conservant sa distance au centre) vers sa destination en s'assurant de ne pas créer de point de multiplicité (voir Figure 3). Lors de cette phase, le plus petit robot ne se déplace pas afin de conserver une configuration guidée. Dès que chaque robot à atteint sa destination, la configuration devient associée à la phase *Terminaison*.

Formation d'une configuration guidée 1. L'ensemble des configurations associées à cette phase possèdent un sous-ensemble EBPC. La phase consiste à effectuer des mouvements probabilistes (tout en conservant le même sous-ensemble EBPC) afin d'obtenir une configuration guidée. Tant que la configuration n'est pas guidée, la phase courante est exécutée. De plus il faut s'assurer que lorsque que la configuration est guidée, tous les robots sont immobiles.

Formation d'une configuration guidé 2. Toutes les configurations restantes sont associées à cette phase. Comme une configuration associée ne possède pas de sous-ensemble EBPC, on peut montrer qu'elle est ordonnée. La phase consiste donc à déplacer le plus petit robot vers le centre afin que la configuration soit guidée. Certains cas spéciaux sont traités, notamment la possibilité de créer un sous-ensemble EBPC lors du mouvement. Dans ce cas, le robot en mouvement doit s'assurer d'être immobile lorsque cette configuration est atteinte, car elle est associée à l'une des phases précédemment décrites.

3 Détails de l'Algorithme

On note F le motif géométrique à former. Pour un robot r, $|r|$ est la distance entre r et le centre de la configuration (où l'unité de longueur est le rayon du $SEC(P)$). De même pour un point $f \in F$, $|f|$ est la distance au centre du motif (où l'unité de longueur est le rayon du $SEC(F)$ du motif). On note $ang(p_1, p_2, p_3)$ l'angle formé par les points p_1, p_2 et p_3 (en choisissant l'orientation qui minimise l'angle).

On ordonne les points de F, $f_1, \ldots, f_n$ tels que $|f_1| \leq \ldots \leq |f_n|$, avec $|f_i| = |f_{i+1}|$ implique $ang(f_i, c(F), f_n) \leq ang(f_{i+1}, c(P), f_n)$, et tels que $ang(f_1, c(F), f_2)$ soit minimal (tous les angles étant choisis avec la même orientation). Si plusieurs ordres existent on choisit celui qui minimise $ang(f_1, c(P), f_3)$, puis celui qui minimise $ang(f_1, c(P), f_4)$ et ainsi de suite. Si plusieurs ordres minimisant $ang(f_1, c(P), f_n)$ existent, alors le motif possède des symétries et les ordres possibles sont équivalents. On ordonne de la même façon les robots $r_1, \ldots, r_n$. Cependant, lorsqu'il existe plusieurs ordres équivalents pour les robots, il est impossible d'affecter à chaque robot une unique destination dans le motif à former.

Formation Guidée. Une configuration est guidée si elle est totalement ordonnée, *i.e.*, il n'y a aucune ambiguïté sur l'ordre des robots précédemment défini, et on a : *(i)* $|r_1| \leq |r_2|/2$; *(ii)* $|r_2| \leq |f_2|$; *(iii)* $2ang(r_1, c(P), r_2) < \min_{f \in F, |f|=|f_2|} ang(f_2, c(F), f)$ (voir Figure 1).

Quasi Formation de Motif. La quasi formation du motif exige tout d'abord de conserver une configuration guidée. Pour cela, les robots r_1 et r_2 ne doivent pas se déplacer (r_2 peut s'éloigner du centre pour atteindre f_2, mais ne peut le faire que si aucun autre robot ne se trouve plus proche du centre que f_2). Aussi, aucun robot ne doit former un angle inférieur à $ang(f_1, c(P), f_2)$ en étant à même distance du centre que r_2 (symbolisé par un trait rouge sur les Figures 2 et 3). La phase débute en déplaçant chaque robot r_i, $i \in [2..n]$ vers le cercle de rayon $|f_i|$. Pour cela, le plus grand robot se trouvant (strictement) à l'intérieur de son cercle se déplace jusqu'a atteindre son cercle en s'assurant de conserver l'ordre des robots (*cf.* déplacement du robot r_7 dans la Figure 2). Ensuite, le plus petit robot se trouvant (strictement) à l'extérieur de son cercle se déplace vers son cercle en conservant l'ordre des robots (*cf.* déplacement du robot r_5). Ces opérations sont répétées jusqu'à ce que tous les robots atteignent leur cercle (*cf.* déplacement du robot r_6).

Ensuite, chaque robot atteint sa destination, tout en conservant sa distance au centre (les déplacements

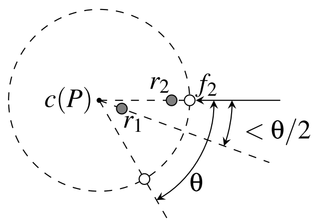

FIGURE 1: Positions des robots r_1 et r_2 afin de créer une configuration guidée.

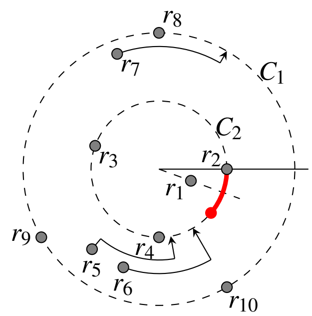

FIGURE 2: Placement des robots à bonne distance du centre.

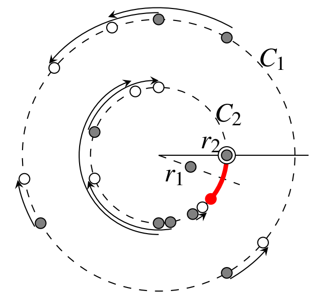

FIGURE 3: Les robots se déplacent vers leur destination finale.

s'effectuent en arc de cercle) et l'ordre des robots. Plus précisément, lors du mouvement d'un robot r, si un robot r' se trouve entre r et sa destination, r se rapproche de r' sans l'atteindre. Dès lors, il ne peut pas y avoir d'interblocage car aucun robot ne souhaite traverser la demi-droite $[c(P), r_2)$ donc les mouvements se font dans un espace isomorphe à un segment.

Formation d'une configuration guidée 1. Dans cette phase, la configuration contient un sous-ensemble EBPC noté Q. Le but est alors d'effectuer des mouvements de manière aléatoire tout en conservant le sous-ensemble EBPC (pour rester dans la même phase). On dit qu'un robot r_e de Q est élu s'il vérifie $|r_e| < \frac{7}{8} \min_{r \in Q - \{r_e\}} |r|$. Si r_e existe, alors il se déplace sur une faible distance sur son cercle (le cercle centré en $c(P)$ de rayon $|r_e|$), tandis que les autres robots restent immobiles. Sinon, tous les robots de Q les plus proches de $c(P)$ effectuent un déplacement aléatoire (les autres restent immobiles). Le déplacement aléatoire effectué par un robot r est soit un déplacement vers le centre sur une distance $|r|/8$, soit un déplacement pour s'éloigner du centre sur une distance $|r|/7$ (en faisant en sorte de rester dans le sous-ensemble EBPC). Chaque déplacement est équiprobable. On peut montrer qu'avec probabilité 1, un robot va s'activer alors qu'il est élu, initiant alors un déplacement sur son cercle.

Lorsque le robot élu se déplace sur son cercle, il casse l'équiangularité (ou la biangularité) de l'ensemble Q. Cependant la faible différence avec un ensemble equiangulaire (ou biangulaire) permet au autres robots de détecter cette configuration comme étant issue du processus d'élection et ainsi arrêter tout déplacement. Il est alors possible de s'assurer que tous les robots sont immobiles. Lorsque c'est le cas, le robot élu peut se rapprocher du centre afin de former une configuration guidée.

4 Conclusion

Nous avons donné un algorithme permettant de former des motifs géométriques qui ne possèdent pas de points de multiplicité. Si l'on suppose en plus que les robots détecte la multiplicité, notre algorithme s'étend naturellement au cas où le motif géométrique contient des points de multiplicité. En effet, lors de la phase de quasi formation du motif, un robot isolé (ne partageant pas sa position avec un autre robot) est toujours en mesure de calculer son rang, et donc sa destination, malgré la présence de points de multiplicité. Ainsi, plusieurs robots peuvent avoir la même destination. L'algorithme est donc identique, mais autorise les robots à former des points de multiplicité avec les autres robots ayant la même destination. Cependant, dans le cas d'un motif qui consiste en un unique point (problème du regroupement), le problème doit être traité séparément.

Références

[BT15] Quentin Bramas and Sébastien Tixeuil. Asynchronous pattern formation without chirality. *CoRR*, abs/1508.03714, 2015.

[YY14] Yukiko Yamauchi and Masafumi Yamashita. Randomized pattern formation algorithm for asynchronous oblivious mobile robots. In Fabian Kuhn, editor, *Distributed Computing*, volume 8784 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 137–151. Springer Berlin Heidelberg, 2014.